

PHÉP VỊ TỰ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

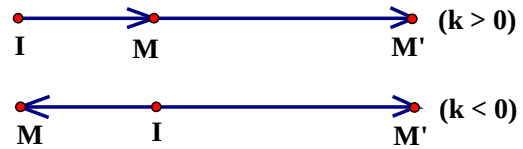
1. Định nghĩa:

Trong mặt phẳng cho điểm I cố định và số thực k không đổi. Với mỗi điểm M của mặt phẳng, phép biến hình biến M thành M' sao cho $\overrightarrow{IM'} = k \cdot \overrightarrow{IM}$ gọi là phép vị tự tâm I, tỉ số k.

Ký hiệu: $V_{(I;k)}(M) = M'$

Chú ý:

- + Khi $k > 0$ thì $\overrightarrow{OM'}$; $\overrightarrow{OM}$ cùng hướng
(I là tâm vị tự ngoài: I nằm ngoài M và M')
- + Khi $k < 0$ thì $\overrightarrow{OM'}$; $\overrightarrow{OM}$ ngược hướng
(I là tâm vị tự trong: I nằm trong M và M')



2. Tính chất:

a. Định lý 1: Nếu $\begin{cases} V_{(I;k)}(M) = M' \\ V_{(I;k)}(N) = N' \end{cases}$ thì $\begin{cases} \overrightarrow{M'N'} = k \cdot \overrightarrow{MN} \\ |\overrightarrow{M'N'}| = |k| \cdot |\overrightarrow{MN}| \end{cases}$

b. Định lý 2: Nếu M, N, P thẳng hàng theo thứ tự thì $V_{(I;k)} : M, N, P \rightarrow M', N', P'$ cũng thẳng hàng theo thứ tự đó.

c.

+ Phép vị tự biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó :
($V_{(I;k)}(d) = d'$ nếu $I \in d \Rightarrow d' \equiv d$, $I \notin d \Rightarrow d' // d$)

+ Phép vị tự biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó.

CHÚ Ý:

(1) Nếu $V_{(I;k)}(M) = M'$ và M' có quỹ tích là hình (H) thì M có quỹ tích là hình $(H') = V_{(I;\frac{1}{k})}(H)$

(2) Với 2 đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ bất kỳ, bao giờ cũng có ít nhất một phép vị tự $V_{(I;k)}(O_1; R_1) = (O_2; R_2)$

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

DẠNG 1: Tìm ảnh của một hình qua phép vị tự bằng tính toán

Bài 1:

1) Cho $A(1; -3)$. Tìm tọa độ $A' = V_{(O; k=-2)}(A)$

2) Cho $(d): x + 2y + 3 = 0$. Tìm phương trình $d' = V_{(I; k)}(d)$ biết $I(1; 2)$, $k = 2$

Hướng dẫn:

1) $A' = V_{(O; k=-2)}(A) \Rightarrow \overrightarrow{OA'} = -2\overrightarrow{OA} \Rightarrow A'(-2; 6)$

2) Chọn $M(-3; 0)$, $N(-1; -1) \in d$. Gọi $M' = V_{(I; k)}(M)$; $N' = V_{(I; k)}(N) \Rightarrow M'(2; -2)$; $N'(-3; -4) \in d'$

Từ đó lập được phương trình $d': x + 2y + 11 = 0$

Cách khác: Gọi $M(x; y) \in d, M' = V_{(I; k)}(M) \Rightarrow \begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x'+1}{2} \\ y = \frac{y'+2}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{x'+1}{2}; \frac{y'+2}{2}\right)$

+ $M \in d \Rightarrow \frac{x'+1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{y'+2}{2}\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow x' + 2y' + 11 = 0 (*)$

+ Gọi $d' = V_{(I; k)}(d) \Rightarrow M' \in d'$, từ $(*) \Rightarrow d': x + 2y + 11 = 0$

Nhận xét:

+ Nếu $I \notin d \Rightarrow d' \nparallel d$ + Nếu $I \in d \Rightarrow d' \equiv d$

Bài 2: (Tương tự) Tìm ảnh của các điểm sau qua phép vị tự tâm I, tỉ số k, biết

1) $A(1; 2); I(3; -1); k = 2$ (Đáp số: $A'(-1; 5)$)

2) $B(2; -3); I(-1; -2); k = -3$ (Đáp số: $B'(-10; 1)$)

3) $C(8; 3); I(2; 1); k = \frac{1}{2}$ (Đáp số: $C'(5; 2)$)

4) $P(-3; 2); Q(1; 1); R(2; -4), I \equiv O, k = -\frac{1}{3}$ (Đáp số: $P'\left(1; -\frac{2}{3}\right); Q'\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right); R'\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$)

Bài 3:

1) Cho 3 điểm $A(0; 3)$, $B(2; -1)$, $C(-1; 5)$. Tồn tại hay không phép vị tự tâm A, tỉ số k biến B thành C?

2) Cho 3 điểm $A(-1; 2)$, $B(3; 1)$, $C(4; 3)$. Tìm phép vị tự tâm A, tỉ số k biến B thành C?

Hướng dẫn:

1) Giả sử tồn tại $V_{(A; k)}(B) = C \Rightarrow \overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} -1 = k \cdot 2 \\ 2 = k \cdot (-4) \end{cases} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$

Vậy tồn tại $V_{\left(A; -\frac{1}{2}\right)}(B) = C$

2) tương tự phần 1)

Bài 4: Cho đường tròn $(C): x^2 + (y - 1)^2 = 1$. Tìm phương trình đường tròn $(C') = V_{(I; k)}(C)$

Hướng dẫn:

+ Ta thấy tâm vị tự $I(0; 1)$ đồng thời là tâm đường tròn $(C) \Rightarrow$ đường tròn (C') cũng có tâm là I.

+ Do $k = 2$ nên bán kính đường tròn (C') gấp 2 lần bán kính đường tròn (C)

+ Vậy $(C') : x^2 + (y - 1)^2 = 4$

Cách khác: Gọi $M(x; y) \in (C); M'(x'; y') = V_{(I; k)}(M) \Rightarrow \dots$

Bài 5: (tương tự) Tìm ảnh của các đường thẳng d qua phép vị tự tâm I , tỉ số k , biết:

1) $d : 3x - y - 5 = 0, I \equiv O; k = -\frac{2}{3}$ (ĐS: $d' : 9x - 3y + 10 = 0$)

2) $d : 2x + y - 4 = 0, I(-1; 2); k = -2$ (ĐS: $d' : 2x + y + 8 = 0$)

Bài 6: (tương tự) Tìm ảnh của các đường tròn (C) qua phép vị tự tâm I , tỉ số k , biết:

1) $(C) : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5, I \equiv O; k = -2$ (ĐS: $(C') : (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 20$)

2) $(C) : (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 5, I(1; 2); k = -2$ (ĐS: $(C') : (x + 3)^2 + (y - 8)^2 = 20$)

Bài 7: Tìm phép vị tự biến:

1) Đường thẳng $d : \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1$ thành $d' : 2x - y - 6 = 0$, biết $V_{(O; k)}$

2) Đường tròn $(C_1) : (x + 4)^2 + y^2 = 2$ thành $(C_2) : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 8$

Hướng dẫn:

1) Có $d : 2x - y - 4 = 0 \parallel d'$.

+ Chọn $M(2; 0) \in d$, gọi $M'(x'; y') = V_{(O; k)}(M) \Rightarrow \begin{cases} x' = k \cdot 2 + 0(1 - k) = 2k \\ y' = k \cdot 0 + 0(1 - k) = 0 \end{cases} \Rightarrow M'(2k; 0)$

+ Do $d' = V_{(O; k)}(d) \Rightarrow M' \in d' \Rightarrow 2 \cdot 2k - 0 - 6 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$. Vậy $V_{(O; \frac{3}{2})}(d) = d'$

2) (C_1) có tâm $I_1(-4; 0)$, bán kính $R_1 = \sqrt{2}$; (C_2) có tâm $I_2(2; 3)$, bán kính $R_2 = 2\sqrt{2}$

+ Ta thấy (C_1) và (C_2) không đồng tâm nên có 2 phép vị tự thỏa mãn yêu cầu bài toán:

TH1: $V_{(I; \frac{R_2}{R_1})}(C_1) = (C_2) \Rightarrow V_{(I; \frac{R_2}{R_1})}(I_1) = (I_2) \Rightarrow \overrightarrow{II_2} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \overrightarrow{II_1} \Rightarrow I(-10; -3)$

TH2: $V_{(I; -\frac{R_2}{R_1})}(C_1) = (C_2) \Rightarrow V_{(I; -\frac{R_2}{R_1})}(I_1) = (I_2) \Rightarrow \overrightarrow{II_2} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \overrightarrow{II_1} \Rightarrow I(-2; 1)$

Bài 8: Trong mặt phẳng Oxy, cho 2 đường tròn :

$(C_1) : (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 1; (C_2) : (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$

a) Xác định tọa độ tâm vị tự ngoài của 2 đường tròn đó

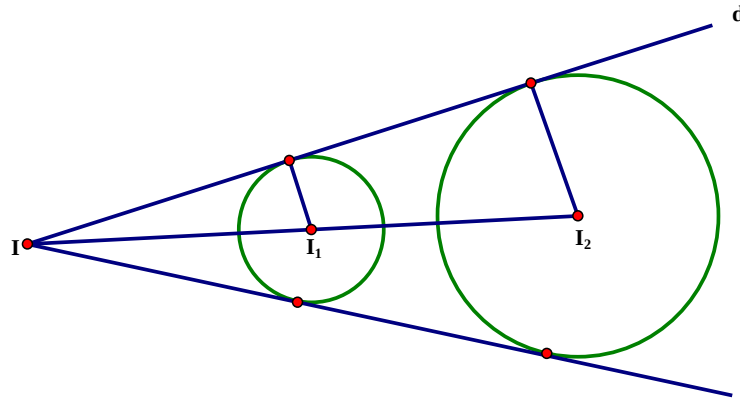
b) Viết phương trình tiếp tuyến chung ngoài của 2 đường tròn đó.

Hướng dẫn:

a) (C_1) có tâm $I_1(1; 3)$, bán kính $R_1 = 1$; (C_2) có tâm $I_2(4; 3)$, bán kính $R_2 = 2$

+ Gọi I là tâm vị tự ngoài của phép vị tự $V_{(I;k)}(C_1) = (C_2) \Rightarrow V_{(I;k)}(I_1) = (I_2) \Rightarrow \overrightarrow{II_2} = k\overrightarrow{II_1}$ trong đó $k = \frac{R_2}{R_1} = 2$, giải hệ phương trình trên $\Rightarrow I(-2;3)$

b) Ta thấy $R_2 + R_1 = I_1I_2$ nên (C_1) và (C_2) ngoài nhau.



+ Gọi d là tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) , khi đó d đi qua I, giả sử d có hệ số góc là k, khi đó phương trình d có dạng: $kx - y + 3 + 2k = 0$

+ Vì d tiếp xúc $(C_1) \Rightarrow d(I_1; d) = R_1 \Rightarrow k = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} d: (\sqrt{2})x - 4y + 12 + 3\sqrt{2} = 0 \\ d: (\sqrt{2})x + 4y - 12 + 3\sqrt{2} = 0 \end{cases}$

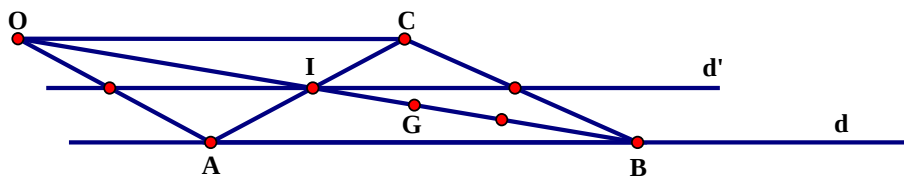
Bài 9: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm A(-1;2) và đường thẳng d đi qua A có hệ số góc bằng 1. Gọi B là điểm di động trên d. Gọi C là điểm sao cho tứ giác OABC là hình bình hành. Tìm phương trình tập hợp:

a) Các tâm đối xứng I của hình bình hành

b) Các trọng tâm G của tam giác ABC

Hướng dẫn

a) Đường thẳng d qua A và có hệ số góc bằng 1 $\Rightarrow d \equiv AB: y - 2 = 1(x + 1) \Leftrightarrow y = x + 3$



+ I là tâm đối xứng của hình bình hành nên $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI} \Rightarrow V_{(O;2)}(I) = B$.

Mà $B \in d \Rightarrow I \in d' = V_{\left(0; \frac{1}{2}\right)}(d) \Rightarrow d' \parallel d$ và qua I đồng thời qua trung điểm OA

$$\Rightarrow d': x - y + \frac{3}{2} = 0$$

b) Ta có $\overrightarrow{OB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OG} \Rightarrow B = V_{\left(0; \frac{3}{2}\right)}(G)$. Mà $B \in d \Rightarrow G \in d'' = V_{\left(0; \frac{2}{3}\right)}(d) \Rightarrow d'' // d$ và qua

$$A' = V_{\left(0; \frac{2}{3}\right)}(A) \Rightarrow A' \left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right) \Rightarrow d'' : x - y + 2 = 0$$

DẠNG 2: Một số bài toán chứng minh, dựng hình và quỹ tích

Bài 1: Chứng minh rằng khi thực hiện liên tiếp 2 phép vị tự tâm I sẽ được một phép vị tự tâm I

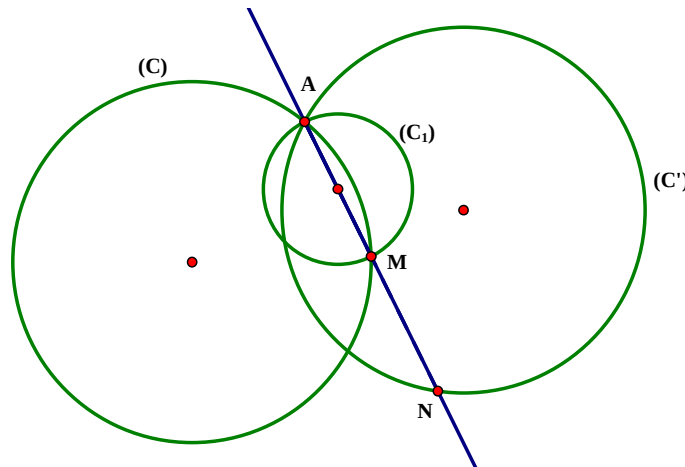
Hướng dẫn

+ Xét $V_{(I,k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = k \cdot \overrightarrow{IM}$ (1), $V_{(I,k')}(M') = M'' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM''} = k' \cdot \overrightarrow{IM'}$ (2)

+ Từ (1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{IM''} = k \cdot k' \cdot \overrightarrow{IM} \Rightarrow V_{(I; k \cdot k')}(M) = M''$ (đpcm)

Bài 2: Cho 2 đường tròn (C) và (C') cắt nhau có 1 giao điểm là A. Hãy dựng đường thẳng d qua A cắt (C) tại M và cắt (C') tại N sao cho M là trung điểm của AN.

Hướng dẫn



* **Bước 1:** Phân tích

+ Giả sử bài toán đã dựng được. Ta có: M là trung điểm AN $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AN} \Rightarrow V_{\left(A; \frac{1}{2}\right)}(N) = M$

+ Vì $N \in (C') \Rightarrow M \in (C_1) = V_{\left(A; \frac{1}{2}\right)}(C')$

* **Bước 2:** Cách dựng

+ Dựng đường tròn $(C_1) = V_{\left(A; \frac{1}{2}\right)}(C')$ (đường tròn (C_1) qua A, có bán kính bằng $\frac{1}{2}$ bán kính của (C'))

+ Dựng $M = (C_1) \cap (C)$ (Do $M \in (C), M \in (C_1)$)

+ Nối AM kéo dài cắt (C') tại N

Bài 3: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O ; R). B và C cố định, A di động trên đường tròn (O). Tìm quỹ tích trọng tâm ΔABC .